P. H. Richter, H. Dullin,
H.-O. Peitgen

Der SPIEGEL, das Chaos – und die Wahrheit

Die SPIEGEL-Serie „Der Kult um das Chaos" [1] hat der Chaosforschung eine zweifelhafte Publicity verschafft. Zwar wurde in den drei Folgen eine Fülle von Material präsentiert, die aufwendige Recherche ist erkennbar, auch kritische Punkte wurden unbekümmert angesprochen, aber dennoch entwertet sich die Darstellung durch ihren Grundtenor: Chaos gebe es überhaupt nicht, es sei nur ein Artefakt des Computers. Der Versuch, diese These durch die Gegenüberstellung zweier Rechnungen zum Dreikörperproblem konkret zu verifizieren, fand inzwischen ein gerichtliches Nachspiel, wobei die verfügte Gegendarstellung im SPIEGEL jedoch keine inhaltliche Richtigstellung war. Die Physikalischen Blätter empfinden sich als das geeignete Forum, den angegriffenen Fachkollegen eine Klarstellung zu ermöglichen, nicht zuletzt auch deshalb, weil der SPIEGEL-Beitrag auch unter Physikern – Nicht-Chaosspezialisten – Verunsicherung hervorgerufen hat. – Einem (ungeschriebenen) Fairneßgebot im Fall einer persönlichen Kontroverse folgend, hat die Redaktion beide Seiten zu Wort kommen lassen und ihnen die Texte vor Veröffentlichung zur Kenntnis gegeben.

In seiner dreiteiligen Serie „Der Kult um das Chaos" [1] vertritt der SPIEGEL-Redakteur Peter Brügge die These, das Chaos der Physiker und Mathematiker gebe es nicht, sondern es sei ein Artefakt des Computers. Als Beleg dient ihm vor allem ein Vergleich zweier Rechnungen zum eingeschränkten Dreikörperproblem der Himmelsmechanik, von denen die eine in Karlsruhe [2], die andere bei uns in Bremen [3] gemacht wurde. Die Karlsruher Trajektorie ist periodisch, die Bremer Bahn chaotisch. Begleittext und Bildunterschrift suggerieren, daß der Unterschied aus einem stümperhaften Fehler der Bremer „Stadtphysici" resultiere (Abb. 1). Nachdem man ihnen das aber mit Hilfe exakter Einschließungsverfahren in Karlsruhe nachgewiesen habe, könnten sie „angeblich nun gar nicht mehr die Daten benennen, mit denen sie dieses famose Chaos im Computer erzeugten". Mit anderen Worten: die Chaosgemeinde sei Scharlatanen aufgesessen, die nun, nachdem man ihnen auf die Schliche gekommen sei, die Spuren zu vertuschen suchten.

Wer mit dem altehrwürdigen Dreikörperproblem vertraut ist, kann über die Darstellung nur den Kopf schütteln, ist doch seit den bahnbrechenden Arbeiten von Poincaré [4] mathematisch streng etabliert, daß chaotische Bewegung in diesem System generisch ist. Die mathematische Schwierigkeit bestand danach über siebzig Jahre lang darin, zu beweisen, daß dennoch auch die regelmäßigen quasiperiodischen Bewegungen (natürlich nicht die periodischen!) typisch sind. Das gelang bekanntlich in Form des KAM-Theorems [5], [6].

Etliche Kollegen rieten uns, der Sache wegen offensichtlich mangelnder Seriosität weiter keine Bedeutung zuzumessen. Wir glauben aber, daß man die Wirkung dieser SPIEGEL-Geschichte nicht unterschätzen sollte. Auch unter Physikern und Mathematikern gibt es Skepsis gegenüber rechnergestützten Behauptungen, und es gibt Aversionen gegen die Resonanz, die das Studium des Chaos bis weithin außerhalb der Naturwissenschaften findet. Daher liegt es nicht allein in unserem eigenen Interesse, den Sachverhalt und einige Begleitumstände der SPIEGEL-Kampagne öffentlich aufzuklären. Tatsache ist,

– daß sich die Karlsruher und die Bremer Rechnungen auf zwei verschiedene physikalische Situationen beziehen
– daß sie in einem wesentlichen Punkt verschiedene Gleichungssysteme verwenden
– daß sich die Bremer Rechnungen reproduzieren lassen.

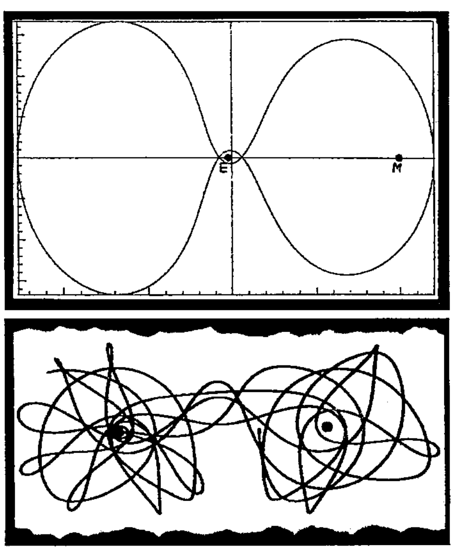

Abb. 1: Gegenüberstellung im SPIEGEL. Die gemeinsame Bildunterschrift lautet: „Himmelschaos vom Computer: Bei einem besseren Rechenverfahren nahm der ‚kleine Planet' statt der chaotischen Umlaufbahn die regelmäßige." Oberes Bild: „Planetenbahn nach Karlsruher Berechnung", unteres Bild: „Planetenbahn nach Bremer Berechnung". (Quelle: DER SPIEGEL, 40/1993, S. 239)

Tatsache ist auch, daß dies dem Spiegel-Redakteur zwei Monate vor Erscheinen seines Artikels schriftlich mitgeteilt wurde und daß er sich darüber mit Prof. Dr.-Ing. E. Adams vom Institut für Angewandte Mathematik der Universität Karlsruhe beriet. Die Denunziation des Chaos als Kunstprodukt des Rechners ist also nicht nur Herrn Brügge als sachlichem Laien anzulasten, sondern sie hat Wurzeln in der *scientific community*, mit denen vor allem wir uns auseinandersetzen müssen.

Die Bewegungsgleichungen des Testplaneten

Beim eingeschränkten Dreikörperproblem wird angenommen, daß ein masseloser Testplanet sich im Feld zweier Hauptkörper der Massen m_1 und m_2 bewege, die auf kreisförmigen Kepler-Bahnen um den Schwerpunkt rotieren. Alle drei Körper bewegen sich in derselben Ebene. Es ist üblich, in ein mit den Hauptkörpern rotierendes (x, y)-Koordinatensystem zu gehen, da dann die Energie des Testplaneten eine Erhaltungsgröße ist (sie wird auch Jacobi-Konstante genannt). Bei geeigneter Wahl der Einheiten für Abstände und Zeiten haben die Bewegungsgleichungen nur *einen* Parameter, das Massenverhältnis des kleineren der beiden

Prof. Dr. P. H. Richter, Dr. H. Dullin, Prof. Dr. H.-O. Peitgen, Institut für Dynamische Systeme der Universität Bremen, Bibliothekstraße, 28359 Bremen.

Hauptkörper zur Gesamtmasse, $\mu = m_2/(m_1 + m_2)$. Sie lauten

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= v_x; \qquad \dot{y} = v_y \\ \dot{v}_x &= x + 2v_y - (1-\mu)\frac{x+\mu}{r_1^3} - \mu\frac{x-1+\mu}{r_2^3} \\ \dot{v}_y &= y - 2v_x - (1-\mu)\frac{y}{r_1^3} - \mu\frac{y}{r_2^3} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{wobei } r_1 := \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2} \\ &\text{und} \quad r_2 := \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Man erkennt außer den Gravitationskräften noch Zentrifugal- und Coriolis-Kräfte, die von der Rotation des Bezugssystems herrühren.

In dieser Form werden die Gleichungen in den Karlsruher Rechnungen integriert. Nun kennt man seit langem das Problem der Stöße des Testkörpers mit den beiden Hauptkörpern: Wenn die Abstände r_1 oder r_2 sehr klein werden, verursachen die Nenner r_1^3 bzw. r_2^3 beträchtliche numerische Schwierigkeiten. Man geht ihnen aus dem Wege, indem man die Gleichungen *regularisiert* [7], [8]. Dafür gibt es zahlreiche Möglichkeiten. Einige Verfahren benutzen komplexe Koordinaten; häufig werden zwei oder mehrere Koordinatensysteme verwendet, je nachdem, wo sich der Testkörper gerade befindet. Jedenfalls nutzt man aus, daß man die Lösung des Zweikörperproblems exakt kennt; in der Nähe eines Stoßes gilt daher näherungsweise das dritte Keplersche Gesetz. Bei den Bremer Rechnungen wurde mit Hilfe der Transformationen

$$\left.\begin{aligned} d\tau &= dt\,(r_1 r_2)^{-3/2}, \\ u &= v_x \sqrt{r_1 r_2}, \\ v &= v_y \sqrt{r_1 r_2} \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

eine neue Zeit τ eingeführt sowie neue Geschwindigkeiten u, v, die bei Stößen nicht mehr divergieren. Die Gleichungen für die Variablen (x, y, u, v) lauten danach

$$\left.\begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= r_1 r_2 u \qquad \frac{dy}{d\tau} = r_1 r_2 v \\ \frac{du}{d\tau} &= -(1-\mu)\, r_2^2 \frac{x+\mu}{r_1} - \mu\, r_1^2 \frac{x-1+\mu}{r_2} + 2v(r_1 r_2)^{3/2} + x r_1^2 r_2^2 \\ &\quad + \frac{u}{2}\left\{\frac{r_2}{r_1}\left((x+\mu)\,u + yv\right) + \frac{r_1}{r_2}\left((x-1+\mu)\,u + yv\right)\right\} \\ \frac{dv}{d\tau} &= -(1-\mu)\, r_2^2 \frac{y}{r_1} - \mu\, r_1^2 \frac{y}{r_2} - 2u(r_1 r_2)^{3/2} + y r_1^2 r_2^2 \\ &\quad + \frac{v}{2}\left\{\frac{r_2}{r_1}\left((x+\mu)\,u + yv\right) + \frac{r_1}{r_2}\left((x-1+\mu)\,u + yv\right)\right\} \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

Sie sind den Gleichungen (1) mathematisch selbstverständlich äquivalent, doch vom Standpunkt der Numerik sind sie es nicht, da Änderungen der Schrittweite beim Integrieren sehr unterschiedliche Auswirkungen haben.

Halten wir also fest: In Karlsruhe wurden die Gleichungen (1), in Bremen die Gleichungen (4) integriert.

Die unterschiedlichen Systeme

Die Karlsruher wählten für ihre Studien das Massenverhältnis $\mu = 1/82.45$, das für das System Erde-Mond charakteristisch ist, während die Bremer ein Doppelsternsystem mit gleich großen Massen untersuchten, $\mu = ½$. Seit den zwanziger Jahren wird letzteres System als *Kopenhagener Problem* bezeichnet, da es von E. Strömgren ausgiebig analysiert und als besonders chaotisch erkannt worden war [9]. Das relative Ausmaß von regelmäßigen und chaotischen Bahnen einer gegebenen Energiefläche hängt allerdings sehr wesentlich noch vom Wert der Energie E ab, wobei

$$E = \frac{1}{2}\left(v_x^2 + v_y^2\right) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2} - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right). \quad (5)$$

Die Karlsruher Bahn hat den Wert $E = -1.041589$, während die Bremer Trajektorie den Wert $E = -1.75$ besitzt. Der Unterschied der durch diese Werte für μ und E charakterisierten Systeme läßt sich am besten durch Poincaré-Schnitte veranschaulichen, für die wir die Schnittbedingung $y = 0$, $\dot{y} > 0$ und die Auftragung in (x, u)-Projektion wählen (Abb. 2).

Gegenüber der geläufigeren Auftragung in (x, v_x)-Projektion hat das den geringfügigen Nachteil, daß die Poincaré-Abbildung nicht flächentreu ist, denn x und u sind nicht konjugiert zueinander. Dafür werden aber die Divergenzen der Geschwindigkeit bei $x = -\mu$ und $x = 1 - \mu$ vermieden; die Berandung der Poincaré-Schnitte hat dort lediglich Knicke.

Ganz offensichtlich verhalten sich die Systeme unterschiedlich. Die Energiefläche der Karlsruher Parameterwahl ist zusammenhängend und nicht kompakt; die Bremer Energiefläche hat einen kompakten und einen nicht-kompakten Teil. Die Verteilung regelmäßiger und chaotischer Bahnen ist im Detail sehr verschieden, aber in beiden Fällen hat man das übliche Bild, daß Inseln elliptischer Dynamik in eine chaotische Umgebung eingebettet sind. Bei der Karlsruher Parameterwahl überwiegt für x-Werte zwischen Erde und Mond der quasiperiodische Charakter; auch rechts von der Mondposition finden sich etliche stabile Bereiche. Das umliegende Chaos ist hier nur andeutungsweise zu erkennen, da typische Anfangswerte (x, u) nach wenigen Iterationen den Anziehungsbereich von Erde und Mond verlassen. (Es handelt sich um chaotische Streubahnen.) Bei der Bremer Parameterwahl gibt es dagegen ein „gebundenes" Chaos, das etwa die Hälfte des kompakten Teils der Energiefläche einnimmt. Die regelmäßigen quasiperiodischen Bahnen finden sich jeweils im Bereich links von den beiden Sonnen. Es handelt sich um Bahnen, die rückläufig um jeweils eine der Sonnen rotieren.

Periodische Orbits haben in der Menge aller Orbits das Maß Null. Man findet sie zum einen als Zentren der Inseln, zum anderen aber auch im chaotischen Bereich als hyperbolische periodische Orbits, die allerdings numerisch nicht ganz leicht zu identifizieren sind.

Es geht hier nicht darum, die komplexe Dynamik im einzelnen zu diskutieren, so interessant das wäre. Es soll nur verdeutlicht werden, wie wenig vergleichbar schon vom Kontext her die Bahnen sind, die der SPIEGEL einander gegenüberstellt. Die fetten Punkte in Abb. 2 markieren die Anfangsbedingungen dieser Trajektorien. In Karlsruhe wurde die sehr spezielle Wahl eines elliptischen periodischen Orbits (der Periode 3) getroffen; die Anfangsbedingung lautet

$$(x, y, v_x, v_y) = (1.2, 0, 0, -1.04935750983). \quad (6)$$

In Bremen wollte man dagegen eine typische chaotische Bahn zeigen und wählte per Mausclick im Poincaré-Schnitt irgendeinen Punkt im Chaosgebiet an:

$$(x, u) = (-0.14188346, 0); \quad (7)$$

aus der Schnittbedingung und der Energiegleichung (5) ergeben sich die Anfangswerte von y und v.

Mit diesen Daten ergeben sich bei hinreichend genauer Integration der Gleichungen (1) bzw. (4) die im SPIEGEL gezeigten Bahnen (Abb. 1). Dabei kommt es für die Karlsruher Bahn auf den genauen Wert der Anfangsbedingung an, während es für den Charakter der Bremer Trajektorie in weiten Grenzen unerheblich ist, wo man beginnt, solange man nur in dem chaotischen Bereich bleibt. Deswegen hatten wir die Anfangsbedingungen (7) seinerzeit als irrelevant nicht notiert und Herrn Brügge auf Anfrage nicht nennen können. Nachdem er uns daraus nun aber den Vorwurf der Verschleierung machte, war es nicht schwer, durch Intervallschachtelung den Anfangswert von x wiederzufinden. Alle anderen Daten hatten wir dem SPIEGEL-Autor mitgeteilt. (Übrigens ist auch bei periodischen Bahnen der genaue Anfangswert nicht kritisch, wenn es sich wie bei der Karlsruher Bahn um einen elliptischen Orbit handelt. Die stabile Libration ist bei kleinen Abweichungen kaum zu erkennen. Erst bei hyperbolischen Orbits ist hohe Genauigkeit in den Anfangsbedingungen gefordert.)

Was steckt also hinter der Suggestion des SPIEGEL, die eine Bahn sei glaubhaft, die andere nicht?

Irreführende Fehleranalyse

In einem ausführlichen Übersichtsartikel zu Problemen der Diskretisierung von Differentialgleichungen [10] präsentiert E. Adams seine periodische Bahn zusammen mit einer anderen, die er erhält, wenn er die Schrittweite der Integration zu groß wählt (Abb. 3). Dabei benutzt er das klassische Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit fester Schrittweite h und findet, daß sich bei $h = 0.001$ die richtige, bei $h = 0.005$ dagegen eine grob falsche Bahn ergibt. Die Gleichungen, die er integriert, sind, wohlgemerkt, die nicht regularisierten Gln. (1). Er nennt die so erzeugte Unregelmäßigkeit *Computational Chaos* und unterstellt, daß das Chaos der Bremer Trajektorie auf eben diese Weise zustande gekommen sei. In seinen Worten: (Das Bremer Bild) *displays a pattern of loops that is closely related to the one in* (seinem Bild mit Schrittweite h = 0.005) . . . *This is an example for the interpretation of Computational Chaos as Dynamical Chaos in the set of true solutions of the ODEs of this problem.* Er schließt also aus der oberflächlichen Ähnlichkeit der beiden Bilder, der Fehler des einen müsse auch im anderen gemacht worden sein. Dieser Fehlschluß unterstützt das Vorurteil des SPIEGEL-Autors, der in einem reißerischen Zwischentitel formuliert: „Im Falle von Chaos sind

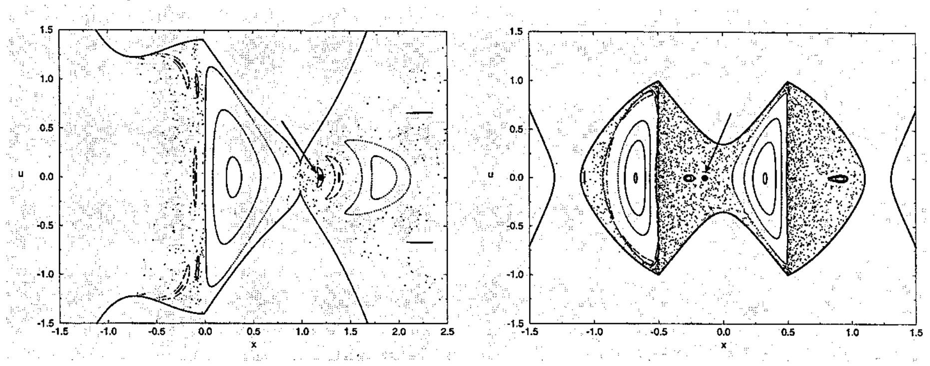

Abb. 2: Poincaré-Schnitte bei festen Werten des Massenverhältnisses μ und der Jacobi-Konstanten E. Als Schnittbedingung wurde das Durchqueren der x-Achse von unten gewählt, wobei jeweils die Phasenraumvariablen x und u aufgetragen sind. Links: die Karlsruher Parameter $\mu = 1/82.45$ und $E = -1.041589$. Rechts: die Bremer Parameter $\mu = 1/2$ und $E = -1.75$. Die Anfangsbedingungen der im SPIEGEL gezeigten Bahnen sind als fette Punkte markiert (s. Pfeile). Die Karlsruher Bahn ist ein elliptischer periodischer Orbit, die Bremer Bahn liegt inmitten eines chaotischen Gebiets.

alle Bilder Lüge." Pikant an der Argumentation des Mathematikers Adams ist aus unserer Sicht auch die Tatsache, daß sie sich vor allem auf die Aussagekraft von Bildern stützt. Eben das wird von einigen Mathematikern den Chaostheoretikern zum Vorwurf gemacht.

Bei genauerem Hinsehen ist die Ähnlichkeit der Bilder durchaus nicht überzeugend. Denn in dem „falschen" Karlsruher Bild nähert sich der Testplanet systematisch dem einen Hauptkörper (Erde). Sein Apogäum wird von Runde zu Runde kleiner, während der Bremer Testplanet „gleich einer wahnsinnigen Stubenfliege im Kraftfeld der beiden „Sonnen" herumfährt" (Zitat aus dem SPIEGEL). Adams analysiert seine fehlerhafte Bahn korrekt, indem er zeigt, daß bei nahen Begegnungen des Testplaneten mit der Erde die Energiekonstante abnimmt. Aber er unterliegt einem Vorurteil, wenn er in einem Schreiben an den SPIEGEL-Autor suggeriert, die Bremer müßten wohl denselben Fehler gemacht und die Energie nicht kontrolliert haben. Spätestens an dieser Stelle schlägt der *investigative journalism* des Peter Brügge in eine unseriöse Kampagne um. Denn der Punkt hätte sich klären lassen.

Die Begleitumstände

Mit Schreiben vom 30. Juli 1993 teilte einer von uns in einem 8seitigen Brief dem SPIEGEL-Autor alles mit, was ein Kundiger zur Beurteilung des Sachverhalts benötigt: vor allem die Bewegungsgleichungen (4) und die Werte der Parameter μ und E. Es wurde die Bedeutung der Regularisierung der Gleichungen (1) hervorgehoben, der Gebrauch von Poincaré-Schnitten beschrieben und die Irrelevanz der genauen Anfangsdaten bei einer chaotischen Bahn betont. In Kenntnis dieses Briefes teilte Herr Adams dem SPIEGEL am 12. August schriftlich mit, *die Ausführungen* (hätten) *keine Auswirkungen auf die bisher zwischen Ihnen und mir geführte Diskussion.* Er argwöhnt, die Bremer hätten vergessen, die Energiekonstanz zu kontrollieren, und gibt dem Journalisten den dunklen Hinweis: *In keiner meiner gedruckten Arbeiten habe ich*

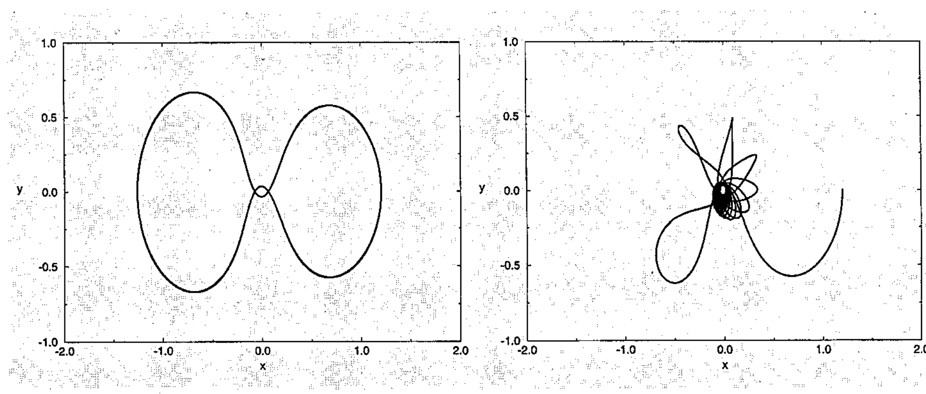

Abb. 3: Die Karlsruher Trajektorien mit Schrittweiten $h = 0.001$ (links) und $h = 0.005$ (rechts). Grundlage ihrer Berechnung in [10] waren die Gln. (1) und das Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung mit fester Schrittweite. Wählt man statt dessen die regularisierten Gleichungen (4), so erhält man die linke – richtige – Trajektorie auch mit der Schrittweite $h = 0.01$.

behauptet, daß Bilder aus dem Bereich der Herren Peitgen und Richter falsch seien. Ich habe „nur" in Vortragsfolien das erwähnte Bild aus „The Beauty of Fractals" neben ein in Karlsruhe berechnetes Bild gesetzt und der Zuhörerschaft Folgerungen überlassen. – Eben so agierte dann auch der SPIEGEL, nur daß er mit deutlicheren Formulierungen der Leserschaft das Folgern abnahm.

Inzwischen hat sich der Sachverhalt auch insoweit geklärt, als Herr Adams auf einer Tagung der *Chaos-Gruppe* in München am 13. November 1993 berichtete, seine Karlsruher Arbeitsgruppe habe nun doch die Bremer Trajektorie verifiziert. Wesentlich dabei sei allerdings die Benutzung der exakten Einschließungsverfahren; die Bremer Rechnungen mit traditionellen Integrations-Algorithmen hätten keine Überzeugungskraft. Hierzu machen wir die folgenden Kommentare.

1. Im linken Teil der Abb. 3 ist die periodische Karlsruher Bahn zu sehen, so wie sie in [2] aus Gln. (1) mit Runge-Kutta und fester Schrittweite (in t) $h = 0.001$ berechnet wurde. Sie wurde allerdings hier mit den regularisierten Gln. (4) und der zehnfachen Schrittweite (in τ) $h = 0.01$ erhalten! Zum Vergleich zeigt der rechte Teil der Abb. 3, was die nicht regularisierten Gleichungen mit Schrittweite $h = 0.005$ ergeben, nämlich das Bild, das bei Herrn Adams den Verdacht allgemein fehlerhafter Rechnung in Bremen aufkommen ließ. Es zeigt sich, daß es eben *nicht* nur auf die numerischen Verfahren ankommt, sondern mehr noch auf die Wahl geeignet robuster Gleichungen. Die alte Technik des Regularisierens verfolgte mit viel Gedankenarbeit eben dieses Ziel.
2. Selbstverständlich verließen wir uns nie allein auf die Gln. (4) und das Runge-Kutta-Vrefahren mit fester Schrittweite. Es wurde zwar mit verschiedenen festen Schrittweiten experimentiert, aber in den meisten Rechnungen wurden ausgereifte Integrationsroutinen mit variabler Schrittweite eingesetzt.
3. Routinemäßig wurde immer die Konstanz der Energie überprüft – ein Minimum an Sorgfalt, das wir allen unterstellen, die ernsthaft mit chaotischen Hamiltonschen Systemen arbeiten. Wir können es nur als böswillig bezeichnen, wenn man hinter unserem Rücken den Verdacht äußert, wir ließen es an dieser Sorgfalt fehlen.
4. Schließlich gibt es noch eine andere mögliche Kontrolle, nämlich das Rückwärtsrechnen nach Umkehr der Geschwindigkeiten am Ende der Bahn. Es muß dabei dieselbe Trajektorie von hinten her durchlaufen werden. Auch dieser Test der Bremer Bahn wurde mit positivem Resultat vorgenommen.

Letzteres ist aufgrund der exponentiellen Divergenz benachbarter Trajektorien im chaotischen Bereich ein besonders empfindlicher Test. Man darf der Meinung sein, daß damit zu viel verlangt wird. Denn eben wegen des positiven Liapunov-Exponenten kann es im Chaos auf den genauen Verlauf einer Bahn jedenfalls für hinreichend lange Zeiten nicht ankommen.

Nachdem gegen Mitte November die sachlichen Fragen geklärt waren, kämpfte der SPIEGEL hartnäckig gegen unseren Versuch, eine Gegendarstellung zu erwirken. Wir erlebten dabei eine interessante Facette des Umgangs mit der Wahrheit. Unter Berufung auf das Pressegesetz vertrat der SPIEGEL den Standpunkt, daß er zu inhaltlicher Richtigstellung nicht verpflichtet sei. Es gehe allein darum, ob sein Autor auf der Grundlage des von Herrn Adams und anderen gelieferten Materials veranlaßt sein durfte, unsere Arbeiten wie geschehen anzugreifen. Das war weitgehend der Fall. Die schließlich gerichtlich verfügte Gegendarstellung im SPIEGEL am 29. November war entsprechend nichtssagend. Wir überlassen es unserer Leserschaft, daraus Folgerungen zu ziehen.

Eine Bemerkung zum Schluß für alle, die mit dem Sachverhalt vertraut sind. Die „Bremer" Trajektorie diente in *The Beauty of Fractals* [3] lediglich der Illustration eines altbekannten Phänomens, das z. B. schon bei Hénon [11] ausführlich beschrieben wird. Ganz fern lag uns, mit diesem Bild eine Aussage vom Charakter beweisbarer mathematischer Theoreme zu machen; dennoch gab es bei der geübten Sorgfalt nicht den geringsten Anlaß, an der Richtigkeit des Bildes zu zweifeln. Daß die Karlsruher Einschließungsmethoden nun zu demselben Ergebnios kommen, ist erfreulich, aber alles andere als überraschend. Wenn wir zur Zielscheibe des SPIEGEL wurden, so verdanken wir das dem Zufall, daß einige Kollegen in ihren populären Darstellungen des Chaos ausgerechnet unser Bild kopierten. Wir haben uns nie als Entdecker dieses Chaos aufgespielt und zum Dreikörperproblem, das andere viel besser als wir verstehen, keine wissenschaftliche Originalpublikation vorgelegt. Um so mehr betrifft die SPIEGEL-Attacke nicht uns allein, sondern alle, die in den vergangenen dreißig Jahren versucht haben, Existenz und Bedeutung deterministisch-chaotischer Bewegungen in seriöser Verbindung von Mathematik, Physik, Numerik und Graphik zu erkunden.

Danksagung

Wir bedanken uns bei Dr. H.-J. Scholz, der vor beinahe zehn Jahren alle Sorgfalt darauf verwandte, mit den damals verfügbaren Computern die Genauigkeit seiner Rechnungen abzusichern. Wir freuen uns darüber, daß sie nun auch in Karlsruhe mit Hilfe exakter Intervallarithmetik bestätigt wurden.

Literatur

[1] *P. Brügge:* Der Kult um das Chaos. DER SPIEGEL, Jg. **47** (1993) Nr. 39, S. 156 ff; Nr. 40, S. 232 ff; Nr. 41, S. 240 ff.
[2] *E. Adams, W. F. Ames, W. Kühn, W. Rufeger, H. Spreuer:* Computational chaos may be due to a single local error. J. Comput. Phys. **104** 1, pp. 241–250 (1993).
[3] *H.-O. Peitgen, P. H. Richter:* The Beauty of Fractals. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1986.
[4] *H. Poincaré*: Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique. Acta Math. **13**, pp. 1–271 (1890) sowie: Méthodes Nouvelles de la Mécanique Céleste, Vol. 1–3, Gauthier-Villars, Paris 1892, 1893, 1899.
[5] *V. I. Arnold*: Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics. Russ. Math. Surveys 18:6, pp. 85–191 (1963).
[6] *J. Moser*: Stable and random motions in Dynamical Systems. Princeton University Press, Princeton 1973.
[7] *M. Hénon:* Exploration Numérique du Problème Restreint I., Ann. Astr. **28** pp. 499–511 (1965).
[8] *E. L. Stiefel, G. Scheifele:* Linear and Regular Celestial Mechanics. Springer, Berlin, Heidelberg, New York 1971.
[9] *E. Strömgren:* Connaissance actuelle des orbites dans le problème des trois corps. Bull. Astron. **9** (1935) 87–130.
[10] *E. Adams:* The Reliability Question for Discretizations of Evolution Problems, in: Scientific Computing with Automatic Result Verification (hrsg. von *E. Adams, U. Kulisch*). Academic Press Boston 1992, S. 423–526.
[11] *M. Hénon:* Exploration Numerique du Problème Restreint III. Bull. astron. **1** (1966) 57–66.

Antwort von E. Adams

Die Ausführungen in „DER SPIEGEL" [A] zu Bahnkurven des eingeschränkten Dreikörperproblems sind sachlich falsch. Zufällig erfahrene und aus dem Zusammenhang gerissene Äußerungen ließen die Autoren von [B] und [C] meine Rolle bei der Entstehung von [A] wesentlich verfälscht sehen. Die Diskussion der speziellen Bahnkurven in [B] ist von geringem allgemeinem Interesse. Wie oft in der Chaos-Debatte gesagt wird, sind übliche numerische Methoden unzuverlässig. Das gilt auch für die in Bremen im Zusammenhang mit Differentialgleichungen der chaotischen Dynamik (DCD) benutzten Verfahren. Die Angriffe auf mich in [B] überraschen, da sie erst nach dem Empfang (am 13. 11. 1993) meiner Bestätigung durch Einschließungsmethoden der in [C] gezeigten „Bremer Bahnkurve" erfolgten. Die Bestätigung verlangte die Kenntnis der Anfangsdaten. Diese Information erhielt ich erstmalig in einem Brief von P. H. Richter mit Datum 1. 11. 1993. – Von allgemeinerem Interesse als die erwähnten Bahnkurven ist aber die in [B] indirekt angesprochene Frage nach der Zuverlässigkeit üblicher numerischer Methoden. Dies insbesondere, da in der öffentlichen Meinung Anwendungen der Mathematik die Richtigkeit und numerischen Berechnungen die Zuverlässigkeit unterstellt werden. Andererseits wird in der Chaos-Debatte oft behauptet, Voraussagen zum Verhalten nichtlinearer dynamischer Systeme seien unmöglich, s. o. Die „Wahrheit" ist, daß DCD i. a. nicht sehr steif sind und ihre wahren Lösungen dann über beschränkten Zeitintervallen *zuverlässig berechnet* und *mathematisch verifiziert* werden können, **wenn** dafür geeignete Verfahren benutzt werden. Diese Eigenschaften haben die auf der Kulisch-Computerarithmetik beruhenden Einschließungsmethoden. Sie sind total fehler-kontrollierend und werden unter Verwendung des Banachschen und des Brouwerschen Fixpunktsatzes gewonnen. In ihren Anwendungen auf DCD haben die berechneten Schranken Abstände von weniger als 10^{-8}. – Die für die zuverlässige Behandlung von DCD erforderliche numerische Präzision wird duch das folgende Beispiel deutlich. H. Spreuer (Karlsruhe) konnte einen homoklinen transversalen Orbit der Lorenz-Gleichungen mittels seines ultra-präzisen Approximationsverfahrens berechnen, nachdem die lokalen Fehler unter 10^{-200} und die akkumulierten Fehler unter 10^{-90} gebracht worden waren. – Die Ergebnisse hochgenauer oder ultra-präziser Näherungsverfahren haben den Charakter von Vermutungen, berechnete Einschließungen dagegen denjenigen mathematischer Beweise. Das gilt u. a. für die in [B] beschriebenen Bremer Approximationen. Durch die Aussage in [B], die (Bremer) „Rechnung ist reproduzierbar" wird nichts bewiesen, denn jede Rechnung sollte diese Eigenschaft haben. Dabei ist es unerheblich, daß das in [C] gezeigte Segment einer speziellen Planetenbahn zeitlich vorwärts wie rückwärts berechnet wurde. Das könnte sogar darauf hindeuten, daß diese Bahnkurve nicht ein Indiz für „Chaos" ist. Das Muster ihrer Schleifen wird tatsächlich auch einfacher und verständlicher bei Darstellung in einer nicht rotierenden Basis. – Während der Entstehung von [A] beruhte meine Beteiligung in Antworten auf Fragen des SPIEGEL-Autors, und zwar auf der eben angedeuteten Argumentationsbasis. Ich trage keine Verantwortung für die daraus in „DER SPIEGEL" [A] entstandenen verfälschenden „Vereinfachungen" und bedauere die hierdurch verursachten Irritationen.

[A] *P. Brügge*: Der Kult um das Chaos (loc. cit. [1]).

[B] vorangehender Beitrag von *Richter, Dullin* und *Peitgen*.

[C] *H.-O. Peitgen, P. H. Richter*: The Beauty of Fractals. Springer, Berlin 1986.

Leserbrief zum SPIEGEL-Titel „Chaostheorie"

An dem Spiegel-Titel „Kult um das Chaos" ist lediglich zu begrüßen, daß die maßlosen Übertreibungen bei der populären Darstellung dieser Wissenschaft der lange erhofften Kritik unterzogen wurden. Allerdings wird durch einen Mix von Verdrehungen, Halb- und Unwahrheiten ein pauschales Bild dieser Wissenschaft suggeriert, das jeden vernünftigen Leser mit Recht zum Kopf greifen läßt und das dringend nach einer qualifizierten Richtigstellung verlangt. Als Sprecher des DFG-Sonderforschungsbereichs Nichtlineare Dynamik, der sich intensiv derjenigen Wissenschaft widmet, die der SPIEGEL als „Chaosforschung" bezeichnet, will ich die notwendige Korrektur exemplarisch an zwei Punkten vornehmen.

Seit etwa einem Jahrzehnt haben seriöse Wissenschaftler auf diesem Gebiet bei ihren Kollegen gegen Vorurteile und ein dubioses Image anzukämpfen, deren Verursacher hauptsächlich die Massenmedien und nur selten die Wissenschaftler selbst sind. Als Beispiel zitiere ich aus dem SPIEGEL Nr. 29/1984 (Seite 128): „Wenn Aktienmärkte abrupt zusammenbrechen oder das regelmäßige Pumpen eines Herzens in lebensbedrohendes Kammerflimmern umkippt – in all diesen Fällen ist Ordnung umgeschlagen in Chaos . . . ". Der deutsche Verlag des populärwissenschaftlichen Buchs von J. Gleick änderte den Originaltitel „Chaos – Making a New Science" in den Nonsens „Chaos – die Ordnung des Universums" und lieferte eine miserable und sinnentstellende Übersetzung. Warum wohl? Die Liste ließe sich fortsetzen über GEO-Spezial „Chaos" bis zu Fernsehsendungen etc. Als einfaches Kriterium der Kompetenz kann meist der Gebrauch der Begriffe „Chaostheorie" und „Chaosforschung" dienen, die sich (im Gegensatz zu „Nichtlineare Dynamik") unter den Experten nicht eingebürgert haben und von ihnen nur selten verwendet werden. Gelegentliche deutlich spekulativ gemeinte Äußerungen seriöser Wissenschaftler werden auch wieder in dieser SPIEGEL-Serie zu Hauptinhalten der Wissenschaft hochstilisiert. War es bisher für die Zeitschriften medienwirksam in spektakulären Übertreibungen die „Chaostheorie" vorzustellen, so hat der SPIEGEL jetzt die Medienwirksamkeit entdeckt, diese Übertreibungen an den Pranger zu stellen.

Der erste Teil endet mit der Enthüllung: „Ein unbekannt großer Anteil dessen, was . . . nach Chaos aussieht, ist vor allem ein Erzeugnis der Numerik – Computerchaos." In dem Kontext maßt sich der Autor an, die Existenz des Phänomens Chaos allgemein in Frage zu stellen. Sollte uns also die Unvorhersagbarkeit des Würfelspiels und des Flipperautomaten nur von (unsichtbaren) Computern halluziniert worden sein? Es werden hier hundert Jahre computerfreier, strikter und unbestritten hoch angesehener Mathematik ignoriert oder verschwiegen, die von Poincaré zu Arnold, Smale, Ruelle und Sinai den wahren Kern dieser Wissenschaft bildet. Das naturwissenschaftliche Phänomen Chaos ist mathematisch (in der Ergodentheorie) wohldefiniert und nur so zu definieren. Während Poincaré bereits vor einem Jahrhundert die Grundlagen schaffte und die Prinzipien des Phänomens verstand, zeigten Sinai und andere seine Existenz in bestimmten Systemen durch aufwendige Beweise. Wer das Gegenteil behauptete mußte in der Mathematik bislang einen Fehler in der Beweisführung nachweisen oder ein Gegenbeispiel nennen, was im SPIEGEL natürlich nicht geschieht. Diese allgemein anerkannten Höhepunkte unserer Wissenschaft werden hier totgeschwiegen, stattdessen paßt es dem SPIEGEL besser ins Konzept, Ruelle nur mit einer gänzlich nebensächlichen Spekulation zu zitieren und Poincarés Arbeiten nicht unserer Wissenschaft zuzurechnen.

T. Geisel, U Frankfurt/Main